

Table 16.2 LOGARITHMIC DERIVATIVES OF THETA FUNCTIONS

$\frac{d}{du} \ln \vartheta_3(u) = f(\epsilon \backslash \alpha)$							
$\epsilon \backslash \alpha$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	α/ϵ_1
0°	∞	∞	∞	∞	∞	∞	90°
5	11.43005	11.40829	11.34306	11.23449	11.08275	10.88811	85
10	5.67128	5.66049	5.62812	5.57427	5.49902	5.40253	80
15	3.73205	3.72495	3.70365	3.66823	3.61876	3.55536	75
20	2.74748	2.74225	2.72658	2.70051	2.66414	2.61756	70
25	2.14451	2.14043	2.12820	2.10787	2.07952	2.04325	65
30	1.73205	1.72875	1.71888	1.70248	1.67962	1.65041	60
35	1.42815	1.42543	1.41729	1.40378	1.38497	1.36096	55
40	1.19175	1.18949	1.18270	1.17143	1.15577	1.13581	50
45	1.00000	0.99810	0.99240	0.98296	0.96985	0.95315	45
50	0.83910	0.83750	0.83273	0.82481	0.81383	0.79987	40
55	0.70021	0.69888	0.69489	0.68830	0.67915	0.66754	35
60	0.57735	0.57625	0.57297	0.56754	0.56001	0.55047	30
65	0.46631	0.46542	0.46277	0.45839	0.45232	0.44464	25
70	0.36397	0.36328	0.36121	0.35779	0.35306	0.34708	20
75	0.26795	0.26744	0.26592	0.26340	0.25992	0.25553	15
80	0.17633	0.17599	0.17499	0.17334	0.17105	0.16816	10
85	0.08749	0.08732	0.08683	0.08600	0.08487	0.08344	5
90	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0
$\epsilon \backslash \alpha$	30°	35°	40°	45°	50°	55°	α/ϵ_1
0°	∞	∞	∞	∞	∞	∞	90°
5	10.65083	10.37113	10.04914	9.68479	9.27764	8.82657	85
10	5.28496	5.14645	4.98711	4.80696	4.60585	4.38332	80
15	3.47816	3.38730	3.28290	3.16502	3.03365	2.88859	75
20	2.56090	2.49430	2.41789	2.33179	2.23605	2.13062	70
25	1.99919	1.94749	1.88828	1.82172	1.74793	1.66695	65
30	1.61498	1.57348	1.52607	1.47292	1.41419	1.35001	60
35	1.33189	1.29791	1.25919	1.21591	1.16828	1.11647	55
40	1.11167	1.08352	1.05154	1.01592	0.97687	0.93462	50
45	0.93301	0.90958	0.88302	0.85355	0.82139	0.78679	45
50	0.78307	0.76355	0.74151	0.71714	0.69066	0.66232	40
55	0.65359	0.63743	0.61923	0.59918	0.57749	0.55441	35
60	0.53902	0.52579	0.51093	0.49462	0.47705	0.45846	30
65	0.43543	0.42482	0.41292	0.39991	0.38595	0.37125	25
70	0.33992	0.33169	0.32248	0.31242	0.30168	0.29042	20
75	0.25028	0.24424	0.23751	0.23017	0.22235	0.21419	15
80	0.16471	0.16076	0.15634	0.15155	0.14645	0.14114	10
85	0.08173	0.07977	0.07759	0.07522	0.07270	0.07009	5
90	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0
$\epsilon \backslash \alpha$	60°	65°	70°	75°	80°	85°	α/ϵ_1
0°	∞	∞	∞	∞	∞	∞	90°
5	8.32941	7.78200	7.17654	6.49756	5.71041	4.71263	85
10	4.13843	3.86930	3.57238	3.24056	2.85790	2.37760	80
15	2.72935	2.55490	2.36323	2.15026	1.90678	1.60605	75
20	2.01530	1.88950	1.75208	1.60057	1.42943	1.22261	70
25	1.57876	1.48308	1.37931	1.26603	1.13996	0.99169	65
30	1.28047	1.20552	1.12492	1.03795	0.94288	0.83453	60
35	1.06066	1.00096	0.93737	0.86969	0.79715	0.71737	55
40	0.88940	0.84142	0.79086	0.73784	0.68225	0.62344	50
45	0.75000	0.71131	0.67101	0.62941	0.58682	0.54358	45
50	0.63242	0.60125	0.56918	0.53662	0.50411	0.47247	40
55	0.53023	0.50526	0.47987	0.45454	0.42988	0.40690	35
60	0.43911	0.41932	0.39943	0.37992	0.36140	0.34488	30
65	0.35605	0.34063	0.32532	0.31054	0.29684	0.28513	25
70	0.27885	0.26719	0.25574	0.24484	0.23497	0.22685	20
75	0.20584	0.19749	0.18935	0.18170	0.17490	0.16949	15
80	0.13572	0.13034	0.12512	0.12026	0.11601	0.11272	10
85	0.06742	0.06478	0.06224	0.05988	0.05784	0.05628	5
90	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0
$\frac{d}{du} \ln \vartheta_6(u) = -f(\epsilon_1 \backslash \alpha)$							

In calculating elliptic functions from theta functions, when the modular angle exceeds about 60°, use the descending Landen transformation 16.12 to induce dependence on a smaller modular angle.

LOGARITHMIC DERIVATIVES OF THETA FUNCTIONS

Table 16.2

$\frac{d}{du} \ln \vartheta_n(u) = g(\epsilon \backslash \alpha)$							
$\epsilon \backslash \alpha$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	α / ϵ_1
0°	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	90°
5	0	0.000331	0.001324	0.002984	0.005318	0.008337	85
10	0	0.000651	0.002607	0.005875	0.010466	0.016401	80
15	0	0.000952	0.003811	0.008583	0.015283	0.023933	75
20	0	0.001224	0.004897	0.011024	0.019616	0.030690	70
25	0	0.001458	0.005833	0.013124	0.023332	0.036462	65
30	0	0.001649	0.006591	0.014819	0.026318	0.041075	60
35	0	0.001788	0.007147	0.016057	0.028487	0.044394	55
40	0	0.001874	0.007486	0.016804	0.029776	0.046332	50
45	0	0.001903	0.007596	0.017037	0.030154	0.046846	45
50	0	0.001873	0.007476	0.016753	0.029616	0.045938	40
55	0	0.001787	0.007129	0.015962	0.028185	0.043654	35
60	0	0.001647	0.006566	0.014691	0.025912	0.040077	30
65	0	0.001457	0.005805	0.012979	0.022871	0.035328	25
70	0	0.001222	0.004868	0.010879	0.019154	0.029556	20
75	0	0.000951	0.003786	0.008455	0.014877	0.022935	15
80	0	0.000650	0.002589	0.005780	0.010165	0.015661	10
85	0	0.000330	0.001314	0.002933	0.005157	0.007942	5
90	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
$\epsilon \backslash \alpha$	30°	35°	40°	45°	50°	55°	α / ϵ_1
0°	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	90°
5	0.012059	0.016511	0.021734	0.027787	0.034760	0.042791	85
10	0.023711	0.032444	0.042671	0.054498	0.068087	0.083685	80
15	0.034569	0.047248	0.062057	0.079124	0.098650	0.120939	75
20	0.044277	0.060427	0.079221	0.100783	0.125308	0.153099	70
25	0.052528	0.071558	0.093605	0.118758	0.147169	0.179081	65
30	0.059074	0.080308	0.104784	0.132533	0.163627	0.198206	60
35	0.063730	0.086442	0.112477	0.141791	0.174358	0.210188	55
40	0.066384	0.089827	0.116544	0.146411	0.179298	0.215082	50
45	0.066987	0.090424	0.116978	0.146447	0.178606	0.213212	45
50	0.065561	0.088287	0.113888	0.142097	0.172615	0.205102	40
55	0.062183	0.083549	0.107483	0.133678	0.161784	0.191402	35
60	0.056989	0.076408	0.098051	0.121592	0.146658	0.172831	30
65	0.050157	0.067122	0.085943	0.106302	0.127835	0.150136	25
70	0.041905	0.055989	0.071553	0.088310	0.105932	0.124058	20
75	0.032483	0.043344	0.055309	0.068143	0.081578	0.095321	15
80	0.022163	0.029545	0.037660	0.046339	0.055395	0.064622	10
85	0.011235	0.014968	0.019067	0.023443	0.028000	0.032631	5
90	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0
$\epsilon \backslash \alpha$	60°	65°	70°	75°	80°	85°	α / ϵ_1
0°	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	90°
5	0.052098	0.063034	0.076222	0.092860	0.115687	0.153481	85
10	0.101680	0.122704	0.147856	0.179233	0.221544	0.289421	80
15	0.146471	0.176024	0.210938	0.253725	0.309882	0.395712	75
20	0.184635	0.220691	0.262588	0.312762	0.376371	0.467893	70
25	0.214885	0.255225	0.301193	0.354775	0.420046	0.507818	65
30	0.236514	0.278976	0.326329	0.379918	0.442452	0.520777	60
35	0.249349	0.292010	0.338517	0.389553	0.446532	0.512966	55
40	0.253651	0.294931	0.338908	0.385698	0.435687	0.490013	50
45	0.250000	0.288691	0.328990	0.370590	0.413176	0.456422	45
50	0.239181	0.274426	0.310353	0.346389	0.381811	0.415539	40
55	0.222085	0.253326	0.284538	0.315020	0.343874	0.369741	35
60	0.199639	0.226549	0.252950	0.278119	0.301140	0.320668	30
65	0.172751	0.195171	0.216820	0.237026	0.254956	0.269431	25
70	0.142285	0.160167	0.177204	0.192823	0.206331	0.216780	20
75	0.109049	0.122405	0.134996	0.146375	0.156015	0.163217	15
80	0.073794	0.082664	0.090960	0.098382	0.104574	0.109083	10
85	0.037222	0.041645	0.045763	0.049423	0.052449	0.054618	5
90	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0

$$\frac{d}{du} \ln \vartheta_d(u) = -g(\epsilon_1 \backslash \alpha)$$

In calculating elliptic functions from theta functions, when the modular angle exceeds about 60°, use the descending Landen transformation 16.12 to induce dependence on a smaller modular angle.